Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet Harj. 5.
Peltonen / Aalto 19.10.2007

1) Olkoon X sisätuloavaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Osoita, että tällöin
a) $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(A)}$ $(A^{\perp\perp} := (A^{\perp})^{\perp})$
b) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$ $(A^{\perp\perp\perp} := ((A^{\perp})^{\perp})^{\perp})$

2) Olkoon M Hilbertin avaruuden H suljettu vektorialiavaruus. a) Osoita, että jos $M \neq H$, niin $M^{\perp} \neq \{0\}$.
b) Päteekö a)-kohdan väite ilman oletusta M suljettu? (Vihje: Harj. 3 teht. 1c))

3) Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Hilbertin avaruuden H ortonormaali jono ja $S = (e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
a) Osoita, että ei löydy kertoimia $\alpha_{2n} \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ siten, että $e_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}$.
b) Anna esimerkki vektorista $x \in H$, jolle Besselin epäyhtälö on aito epäyhtälö.

4) Olkoon $C(-5,5) = \{f: [-5,5] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ ja $A = \{f \in C(-5,5) \mid f(0) = 1\}$.
a) Osoita, että A on suljettu ja konveksi joukko normiavaruudessa $(C(-5,5), \|\cdot\|_\infty)$.
b) Osoita, että joukossa A on ääretön määrä normin minimoivia alkioita.

5) Oletetaan tunnetuksi, että $L^2(-1,1)$ on Hilbertin avaruus.
Määrää $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2 \, dt$.

6) Olkoon $C(0,1) = \{f: [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ ja $A = \{f \in C(0,1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t)\,dt = 1\}$.
a) Osoita, että A on suljettu ja konveksi joukko normiavaruudessa $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$
b) Osoita, että A:ssa ei ole normin minimoivaa alkiota.

Harjoitus 5. FAP

1. Olkoon X sisätuloavaruus ja $A \subset X$.

Osoita, että

a) $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span}(A)}$

b) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$

Tod. b) Lauseen 5.7 nojalla $A^{\perp}$ on suljettu. Seurauksen 5.14a nojalla $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$

a) Seurauksen 5.14.a) nojalla

$$\overline{\mathrm{span}(A)} = \overline{\mathrm{span}(A)}^{\perp\perp},$$

sillä $\overline{\mathrm{span}(A)}$ on suljettu.

Koska $A \subset \mathrm{span}(A) \subset \overline{\mathrm{span}(A)}$, niin $\overline{\mathrm{span}(A)}^{\perp} \subset A^{\perp}$, ja edelleen

$$A^{\perp\perp} \subset \overline{\mathrm{span}(A)}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span}(A)}$$

Osoitetaan lopuksi, että

$$\overline{\mathrm{span}(A)} \subset A^{\perp\perp}$$

$A^{\perp\perp}$ on vektoriavaruus ja $A \subset A^{\perp\perp}$.

Toisaalta span(A) on pienin vektori-avaruus, joka sisältää A:n. Siis

$$\mathrm{span}(A) \subset A^{\perp\perp}.$$

Koska $A^{\perp\perp}$ on suljettu, niin

$$\overline{\mathrm{span}(A)} \subset A^{\perp\perp}.$$

2(a) Olkoon M avaruuden H suljettu v.a.a., missä H on Hilbert. Osoitetaan, että jos $M \neq H$, niin $M^{\perp} \neq \{0\}$.

Tod. Oletetaan, että $M^{\perp} = \{0\}$. Tällöin

$$M^{\perp\perp} = \{y \in H : (x|y) = 0 \ \forall x \in M^{\perp}\}$$
$$= H.$$

Koska M on suljettu $M = M^{\perp\perp} = H$, mikä on ristiriita.

$\square$

2.b) Olkoon

$$S = \{ x \in \ell^2 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x_i = 0 \ \forall i \geq N \}.$$

Tällöin $S \subset \ell^2$ ei ole suljettu.

Selvästi $\overline{S} \neq \ell^2$, koska

$$x = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, \dots) \in \ell^2 \setminus S.$$

Osoitetaan, että $S^\perp = \{0\}$.

Olkoon $x \in S^\perp \setminus \{0\}$. Tällöin

kaikilla $y \in S$ pätee

$$(x | y) = 0 .$$

Olkoon $y_k = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$.

Nyt $y_k \in S$ ja $y_k \xrightarrow{\ell^2} x$, jolloin

$$(x | y_k) \longrightarrow (x | x) = \|x\|^2_{\ell^2} > 0 .$$

Siis on olemassa jokin $y_{k_0} \in S$ s.e.

$$|(x | y_{k_0}) - (x | x)| \leq \frac{\|x\|^2_{\ell^2}}{2} ,$$

jolloin $|(x | y_{k_0})| \geq \frac{\|x\|^2_{\ell^2}}{2} > 0$, mikä on ristiriita. $\square$

3. Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Hilbertin avaruuden H ortonormaali kanta. Olkoon $S = (e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Osoita, ettei ole kertoimia $\alpha_{2n}\in\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$ siten, että

$$e_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n} .$$

Tod. Koska jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ortonormaali

$$(e_1 \mid e_{2n}) = 0$$

kaikilla $n\in\mathbb{N}$. Jos olisi kertoimet $\alpha_{2n}\in\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$ s.e. $e_1 = \sum \alpha_{2n} e_{2n}$,

niin

$$\begin{aligned}\underline{1} = (e_1 \mid e_1) &= (e_1 \mid \sum \alpha_{2n} e_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} (e_1 \mid e_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 ,\end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Sama toisin:

Jos $e_1 \in \overline{\mathrm{span}(S)}$ ja toisaalta $e_1 \in S^{\perp}$, niin $e_1 \in S^{\perp} \cap \overline{\mathrm{span}(S)} = \{0\}$.

3. b) Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaalijono. Olk. $x = e_1$.

Silloin

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x \mid e_{2k})|^2$$

$$= 0 < 1 = \|x\|^2.$$

4. Olkoon $C[-5,5) = \{ f : [-5,5] \to \mathbb{R} : f \text{ jva} \}$.

Olkoon $A = \{ f \in C(-5,5) : f(0) = 1 \}$.

a) Osoitetaan, että A on suljettu ja konveksi.

<u>Suljettu:</u> Osoitetaan, että $C(-5,5) \setminus A$

on avoin. Olkoon $f \in C(-5,5)\setminus A$.

Tällöin $f(0) \neq 1$. Olkoon

$\varepsilon = \frac{1}{2} |f(0) - 1|$. Tällöin

$B(f, \varepsilon) \subset C(-5,5) \setminus A$, sillä

jos $g \in B(f, \varepsilon)$, niin

$$|g(0) - 1| \geq -|g(0) - f(0)| + |f(0) - 1|$$
$$\geq -\|g - f\| + |f(0) - 1|$$
$$\geq \frac{1}{2} |f(0) - 1| > 0,$$

ja $g(0) \neq 1$.

4a). Konveksi: Olkoon $x, y \in A$.

~~Tällöin~~

Olkoon $\lambda \in (0,1)$.

Tällöin $\lambda x + (1-\lambda) y = z \in C(-5,5)$,

sillä $C(-5,5)$ on vektoriavaruus.

Toisaalta

$$z(0) = \lambda x(0) + (1-\lambda) y(0) = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

4.b) Olkoon $f \in A$. Tällöin

$$\|f\|_\infty \geq |f(0)| = 1.$$

Siis normin minimoivat alkiot ovat sellaisia, joiden arvot vaihtelevat välillä $[-1,1]$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja asetetaan:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1-kx, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1/k \\ 0, & \text{kun } 1/k \leq x \end{cases}.$$

Nyt $\|f_k\| = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

$f_k \neq f_j$ aina kun $k \neq j$.

5. Määrää

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2\,dt .$$

Huom! Ks lause 5.18. ja sen seuraus!

<u>Ratkaisu</u> Tulkitaan ongelma seuraavan tehtävän kautta: "Etsi pisteen $t^3 \in L^2(-1,1)$ pienin etäisyys aliavaruudesta $M = \mathrm{span}(1, t, t^2)$".

Etsitään aliavaruuden M ortonormaali kanta.

Olkoon $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tällöin

$$(e_1, e_1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\,dt = 1 .$$

Olkoon $e_2 = \alpha t$. Nyt

$$(e_1, e_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 ,$$

$$(e_2, e_2) = \alpha^2 \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}\alpha^2 .$$

Valitaan siis $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Samalla tavoin asetetaan $e_3 = \beta + \gamma t^2$. Nyt

$$(e_1, e_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{3}\gamma = \sqrt{2}\left(\beta + \frac{1}{3}\gamma\right),$$

$$(e_2, e_3) = 0 \qquad \text{(pariton funktio)}$$

$$(e_3, e_3) = \int_{-1}^{1} \beta^2 + 2\beta\gamma t^2 + \gamma^2 t^4\,dt = 2\beta^2 + \frac{4}{3}\beta\gamma + \frac{2}{5}\gamma^2 .$$

Ratkaistaan β, γ.

Edelleen saadaan yhtälöt

$$\begin{cases}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0\\ \beta^2 + \frac{2}{3}\beta\gamma + \frac{1}{5}\gamma^2 = 1\end{cases}$$

ja näistä $\gamma = -3\beta$ ja

$$\beta^2 - 2\beta^2\cancel{\gamma} + \frac{9}{5}\beta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \beta^2 = 1 / \left(1 - 2 + \frac{9}{5}\right) = \frac{5}{4}.$$

Valitaan $\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ja $\gamma = -\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Saatiin ortonormaali kanta

$$\begin{cases} e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\\ e_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\, t^2\end{cases}$$

Olkoon $y = (t \mapsto t^3) \in L^2(-1,1)$.

$(y \mid e_1) = 0$, sillä integrandi pariton

$$(y \mid e_2) = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \, dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$(y \mid e_3) = 0$, sillä integrandi pariton.

Lause 5.18 $\Rightarrow$

$$\min \int_{-1}^{1} |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left|t^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right|^2 dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left| t^3 - \frac{3}{5} t \right|^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^6 - 2 \frac{3}{5} t^4 + \frac{9}{25} t^2 \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^6 dt - \frac{6}{5} \int_{-1}^{1} t^4 dt + \frac{9}{25} \int_{-1}^{1} t^2 dt$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\cancel{9}^{3}}{25} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{\cancel{18}\,6}{\cancel{75}\,25} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25}$$

$$= \frac{2 \cdot 25 - 6 \cdot 7}{25 \cdot 7} = \frac{50 - 42}{25 \cdot 7} = \frac{8}{175}$$

6. Olkoon $C(0,1) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatk} \}$.

Olkoon $A = \{ f \in C(0,1) : f(0) = 0, \int_0^1 f = 1 \}$.

a) Osoitetaan, että A on suljettu.

Tod. Olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ jono, joka suppenee pisteeseen $x \in C(0,1)$. Tällöin

$$|x(0)| = |x(0) - 0| = \lim_{n \to \infty} |x(0) - x_n(0)| \le \lim_{n \to \infty} \|x - x_n\|_\infty = 0$$

$$\left| \int_0^1 x - 1 \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \int_0^1 x - \int_0^1 x_n \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \int_0^1 x - x_n \right| \le \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \|x - x_n\|_\infty = 0.$$

Siis $x(0)=0$ ja $\int_0^1 x(t)\,dt = 1$.

Näin ollen $x \in A$ ja $\overline{A} \subset A$,

joten A on suljettu.

<u>A on konveksi</u>:

Olkoon $x, y \in A$, $\lambda \in (0,1)$. Olkoon $z = \lambda x + (1-\lambda) y$.

Tällöin $z \in \mathcal{C}(0,1)$ ja

$$z(0) = \lambda x(0) + (1-\lambda) y(0) = 0$$

$$\int_0^1 z(t)\,dt = \lambda \int_0^1 x(t)\,dt + (1-\lambda) \int_0^1 y(t)\,dt = 1.$$

Siis $z \in A$. $\square$

b) Tarkastellaan funktioita

$$x_k(t) = \frac{k+1}{k}\left(1-(1-t)^k\right), \quad k = 1,2,\ldots$$

Nyt $x_k \in A$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\|x_k\|_\infty = x_k(1) = \frac{k+1}{k}.$$

Näin ollen

$$\inf_{x \in A} \|x\|_\infty \leq 1.$$

Olkoon nyt $x \in A$ s.e. $\|x\|_\infty \leq 1$.

Tällöin jatkuvuuden nojalla on olemassa

$\delta > 0$ s.e.

$$|x(t) - x(0)| \leq \frac{1}{2}$$

kaikilla $0 \leq t \leq \delta$. Nyt voidaan

arvioida

$$\left| \int_0^1 x(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt$$

$$= \int_0^\delta |x(t)|\,dt + \int_\delta^1 |x(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^\delta \frac{1}{2}\,dt + \int_\delta^1 1\,dt$$

$$= 1 - \frac{\delta}{2} < 1,$$

mikä on ristiriita. Siis kaikilla $x \in A$

$\|x\|_\infty > 1$. Näin ollen normin minimoivaa

alkiota ei ole ja

$$\inf_{x \in A} \|x\| = 1.$$