6.3 <u>Fejérin lause</u> Ol. $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t)\,dt \quad \text{kun } x \in [0,2\pi],\ n \in \mathbb{N}$$

Tällöin pätee

$$\| K_n * f - f \|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \to 0$$

eli $K_n * f(x) \to f(x)$ tasaisesti, kun $n \to \infty$

Tod: Tasaisesti jatkuva $f$ (jva sulj. välillä!) $2\pi$-periodisena funktiona jatkettavissa koko $\mathbb{R}$:n. $K_n$ $2\pi$-periodinen ja jatkuva $\forall x \in (0,2\pi)$.

$$(*) \quad K_n * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t)\,dt \overset{u = x-t}{=} \frac{-1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(x-u) K_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u) K_n(u)\,du$$
$$= f * K_n(x)$$

Ol. $\varepsilon > 0$. $f$ tas. jva $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ s.e.

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi} \quad \forall\, |u| < \delta,\ x \in [0,2\pi].$$

Olk. $C_1 = \sup_{u\in(0,2\pi)} |f(u)| < \infty$

6.2. (ii) $\Rightarrow$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $0 \le K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4C_1}$ kun $\delta \le u \le 2\pi - \delta$ ja $n \ge n_0$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |K_n * f(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x)) K_n(u)\,du \right|$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-u) - f(x)| K_n(u)\,du = \underbrace{\int_0^{\delta} \dots + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta}}_{I_2}$$

6.2. i) $\Rightarrow$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)| K_n(u)\,du \le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u)\,du < \frac{\varepsilon}{2}$$

$K_n$ $f$ $2\pi$-periodisia $\Rightarrow |I_1| \le \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-u) - f(x)| K_n(u)\,du \le 2\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| \sup_{x\in[\delta,2\pi-\delta]} K_n(x) \le 2C_1 \cdot \frac{\varepsilon}{4C_1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow |K_n * f(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\square$.

(6.4)

Huom. Saadaan: $K_n * f(x) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\right) * f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k * f(x)$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x)$ kun $x \in [0,2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

L. 6.3. $\Rightarrow$ jatkuvan $2\pi$-periodisen funktion $f$ Fourier-osasummien aritmeettinen keskiarvo suppenee tasaisesti kohti funktiota $f$ välillä $[0,2\pi]$ $\Rightarrow$ supp. pisteittäistä $\forall\, x \in [0,2\pi]$.

6.4. Seuraus Jos $f \in C(0,2\pi)$ on $2\pi$-periodinen ja $\hat{f}(k)=0$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, niin $f \equiv 0$.

Tod: Jos $\hat{f}(k)=0$ $\forall\, k\in\mathbb{Z}$ niin $S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} K_n * f(x) = 0$ $\forall\, x\in[0,2\pi]$. $\square$

$\therefore$ Jos $f,g \in C(0,2\pi)$ $2\pi$-periodisia ja $\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$ $\forall\, k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f=g$.

Voidaan os: sileät funktiot tiheässä $L^p[0,2\pi]$:ssä kun $p \neq \infty$

6.5. Lause Ol. $f \in L^p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin $\exists$ $2\pi$-periodinen $C^\infty$ funktio $g$ s.e. pätee

$$\|f-g\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Huom Jos $g$ jatkuva niin $K_n * g(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(g;x)$ äärellinen summa trigonometrisia funktioita ja siis sileä. Fejér $\Rightarrow$ riittää löytää jatkuva $g$ jolle $(*)$ pätee, sillä

$$\|f - K_n * g\|_p \le \|f-g\|_p + \|g-K_n * g\|_p$$

ja

$$\|g-K_n*g\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |g(x)-K_n*g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\le c\,\|g-K_n*g\|_\infty \to 0 \quad \text{kun } n\to\infty$$

Tod: (Reaalianalyysi)

6.6. Seuraus Jos $f \in L^2(0,2\pi)$ ja

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \text{ niin } f \equiv 0.$$

Erityisesti, jos $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $x \in [0,2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$

niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on $L^2$:n ortonormaali kanta.

Tod: Ol. $\varepsilon > 0$ 2.6.5 $\Rightarrow$ $\exists\, g \in C(0,2\pi)$ $2\pi$-periodinen ja $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. Fejér $k_n * g \to g$ tasaisesti välillä $[0,2\pi]$ kun $n \to \infty$

$\Rightarrow \|g - k_n * g\|_2 \leq C\,\|g - k_n * g\|_\infty < \varepsilon$ jollakin $n \in \mathbb{N}$

$$k_n * g = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k, \text{ missä } e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$$

$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali $\Rightarrow$

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n}(f|e_k)e_k\|_2 \leq \|f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\|_2$$

$$\Rightarrow \|f - \sum_{k=-n}^{n}(f|e_k)e_k\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\|_2 < 2\varepsilon$$

Ol $\Rightarrow$ $(f|e_k) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \|f\|_2 < 2\varepsilon$. $\varepsilon$ mv. $\Rightarrow f = 0$

L. 5.23 (ii) $\Rightarrow$ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta. $\square$

# 7. Bairen lause ja tasaisen rajoitetun periaate



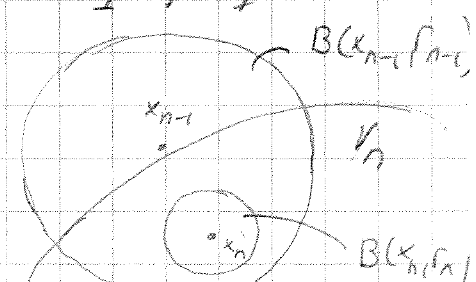
Ol. $(X, d)$ metrinen avaruus

7.1. Bairen kategorialause Ol. $(X, d)$ täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset_o X$, $j \in \mathbb{N}$ on numeroituva kokoelma avoimia tiheitä joukkoja, niin joukko

$$V = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on tiheä avaruudessa } X.$$

Tod: Ol. $\emptyset \neq U \subset_o X$, Riittää os. $U \cap V \neq \emptyset$ (s. 1.2)
Konstruoidaan induktiivisesti Cauchy-jono $(x_j)$, jonka raja-arvo etsitty piste $x \in U \cap V$.

$n = 1$: $V_1$ tiheä ja avoin $\Rightarrow \exists\, x_1 \in U \cap V_1 \subset_o X$
$\Rightarrow \exists\, r_1 > 0$ s.e. $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U \cap V_1$, $r_1 < 1$




Ol. $x_j, r_j$ valittu $\forall\, j = 1, \ldots, n-1$
$V_n$ tiheä, avoin $\Rightarrow$
$\exists\, x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n \subset_o X$
s.e. $\overline{B(x_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$
$0 < r_n < \frac{1}{n}$.

Jos $j \leq k$, niin $x_k \in B(x_k, r_k) \subset B(x_j, r_j)$

$\Rightarrow d(x_k, x_j) < r_j < \frac{1}{j} \quad \Rightarrow (x_j)$ Cauchy

$X$ täydellinen $\Rightarrow \exists\, x = \lim_{j \to \infty} x_j \in X$

$\forall j$: $x_k \in B(x_j, r_j)$ kun $k \geq j$ $\underset{k \to \infty}{\Rightarrow} x \in \overline{B(x_j, r_j)} \subset V_j \ \forall j$

$\Rightarrow x \in V$. Lisäksi $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset U$ $\therefore x \in U \cap V$. $\square$

Saadaan:

7.2. Seuraus Ol. $(X, d)$ täydellinen metrinen avaruus. $F_n \subset_c X$ suljettu $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ja

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

Tällöin ainakin yksi joukoista $F_n$ sis. avoimen kuulan.

7.2.

Tod: Merk. $V_n = X \setminus F_n \subset_o X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

VO: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \forall x \in X.\ B(x,r) \not\subset F_n$

$\Leftrightarrow B(x,r) \cap V_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}, r > 0, x \in X$

$\Rightarrow V_n$ tiheä, avoin

$L.7.1 \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$ tiheä $X$:ssä $\Rightarrow$

$\exists x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n \quad \lightning. \quad \square.$

## 7.3. Tasaisen rajoituksen periaate (Banach-Steinhaus)

Ol. $X$ Banach-avaruus, $Y$ normiavaruus ja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ($J$ mv. indeksijoukko). Tällöin on kaksi toisensa poissulkevaa vaihtoehtoa:

(i) $\exists C < \infty$ s.e. $\|A_\alpha\| \leq C \quad \forall \alpha \in J$

tai

(ii) $\exists x \in X$ s.e. $\sup_{\alpha \in J} \|A_\alpha x\| = \infty$.

Erityisesti, jos $C(x) = \sup_{\alpha \in J} \|A_\alpha x\| < \infty \quad \forall x \in X$,
niin $\sup_{\alpha \in J} \|A_\alpha\| = \sup_{\alpha \in J} \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_\alpha x\| < \infty$

Huom. Jos (i) ei toteudu, niin löytyy $x \in X$, joka ei riipu indeksistä $\alpha$!.

Tod: kohta

7.4. seuraus Ol. $X$ Banach-avaruus, $Y$ normiavaruus ja jono $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ s.e. $\exists Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x \quad \forall x \in X$.

Tällöin $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Huom. Vahvistaa tulosta 4.4.

Tod: Selvästi $A: X \to Y$ lin. $\forall x \in X$: $(A_n x)$ Cauchy-jono $Y$:ssä ja erityisesti siis rajoitettu joukko $Y$:ssä

$\Rightarrow C(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty \quad \forall x \in X$.

$L.7.3. \Rightarrow \exists C < \infty$ s.e. $\|A_n\| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\|Ax\| = \lim_{n \to \infty} \|A_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \|x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X. \square.$

Tod. (7.3) Ol. $F(n,\alpha) := \{x \in \underline{X} \mid \|A_\alpha x\| \le n\}$, $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$

Kuvaus $f_\alpha : x \mapsto \|A_\alpha x\|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva $\Rightarrow$ $F(n,\alpha) = f_\alpha^{-1}(\underbrace{[-n,n]}_{\subset\subset \mathbb{R}}) \subset \underline{X}$ suljettu $\forall \alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$

$$F_n := \bigcap_{\alpha \in J} F(n,\alpha) \subset \underline{X} \text{ suljettu}.$$

Ol (ii) ei päde. Olk. $x \in \underline{X}$: $\sup_{\alpha \in J} \|A_\alpha x\| < \infty$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ s.e. $\sup_{\alpha \in J} \|A_\alpha x\| \le n$ $\Rightarrow$ $x \in F(n,\alpha)$ $\forall \alpha \in J$
$\Rightarrow x \in F_n$

$$\Rightarrow \underline{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

$\underline{X}$ Banach $\overset{L.7.2.}{\Rightarrow}$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ ja kuula $B(x_0,r_0)$ s.e. $B(x_0,r_0) \subset F_N$.

V: $\forall \alpha \in J$, $\forall x \in B_{\underline{X}}(0,1)$ $\|A_\alpha x\| \le \frac{2N}{r_0}$:

Ol. $x \in \underline{X}$ ja $\|x\| < 1$ $\Rightarrow$ $x_0 + r_0 x \in B(x_0, r_0)$ ja
$\|A_\alpha(x_0 + r_0 x)\| \le N$ $\Rightarrow$

$$\|A_\alpha x\| = \frac{1}{r_0}\|A_\alpha(r_0 x)\| = \frac{1}{r_0}\|A_\alpha(x_0 + r_0 x) - A_\alpha(x_0)\|$$

$$\le \frac{1}{r_0}\left(\|A_\alpha(x_0+r_0x)\| + \|A_\alpha(x_0)\|\right) \le \frac{2N}{r_0} =: C$$

$\Rightarrow \|A_\alpha\| \le C \quad \forall \alpha \in J$. $\square$.

Sovelluksia Fourier-sarjoihin:

Tunnettua (?): $C^1$ funktioille Fourier-sarja suppenee pisteittäin ja $L^2$-funktioille aina kin $L^2$-normissa.

Kuitenkin:

7.5. <u>Lause</u> On olemassa jatkuva $2\pi$-jaksollinen funktio $f \in C(0,2\pi)$, jonka Fourier-sarja

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

hajaantuu pisteessä $x = 0$.

Tod: Aset. $S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$. (7.4.)

Os. $\exists$ $f \in C(0,2\pi)$ s.e. $f(0) = f(2\pi)$ ja $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f;0)| = \infty$.

L. 6.1 $\Rightarrow$ $S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\,dt = (D_n * f)(x)$, missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Aset $\Lambda_n(f) = S_n(f;0)$. Kuvaus $\Lambda_n : C(0,2\pi) \to \mathbb{R}$ on jatkuva:

$$|\Lambda_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t)\,dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||D_n(-t)|\,dt$$

$$\overset{D_n(t)=D_n(-t)}{\le} \frac{\|f\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt \qquad \forall\ f \in C(0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \|\Lambda_n\| \le (2\pi)^{-1} \|D_n\|_1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Voidaan os. että tässä pätee "=".

Lisäksi: $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt = \infty$

:

$$\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\underbrace{|\sin\frac{t}{2}|}_{|\sin\frac{t}{2}| \le \frac{t}{2} < t}}\,dt \ge \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,dt$$

$$\ge \int_0^{\pi} |\sin((n+\tfrac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \overset{s=(n+\frac{1}{2})t}{=} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin s| \frac{ds}{s} \ge \sum_{k=0}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin s| \frac{ds}{s}$$

$$\ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin s|\,ds} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \quad \text{kun } n\to\infty.$$

$= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin s\,ds = -\big/_{(k-1)\pi}^{k\pi} \cos s = 2$ k pariton

$= -\int \sin s\,ds = \big/ \cos s = 2$ k parill.

L. 7.3. $\Rightarrow$ $\exists$ $f \in C(0,2\pi)$ s.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Lambda_n(f)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f;0)| = \infty$

$\square$.

Funktion $f$ Fourier-sarja ei välttämättä suppene $L^1$ mielessä. (7.5.)

7.6. Lause $\exists\, f \in L^1(0,2\pi)$ s.e.
$$\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \|_1 \not\to 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tod: Olk. $A_n : L^1(0,2\pi) \to L^1(0,2\pi)$ s.e.

$$(A_n f)(x) = S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad f \in L^1(0,2\pi),\ x \in [0,2\pi],\ n \in \mathbb{N}$$

$A_n$ lin. Päkee

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| |e^{-ikx}| \, dx = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \quad \text{kun } f \in L^1(0,2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Trigonometrisen polynomin $A_n f$ $L^1$-normille saadaan arvio

$$\|A_n f\|_1 = \| \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \|_1 \leq \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)| \underbrace{\|e^{ikx}\|_1}_{=1} \leq \frac{(2n+1)}{2\pi} \|f\|_1$$

$\forall\, f \in L^1(0,2\pi)$

$\therefore$ $A_n : L^1(0,2\pi) \to L^1(0,2\pi)$ jatkuva $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

VO: $\forall\, f \in L^1(0,2\pi)$ $\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_1 = 0$

Tällöin jono $(A_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee $\forall\, f \in L^1(0,2\pi)$, joten
$\sup \|A_n f\|_1 < \infty \quad \forall\, f \in L^1(0,2\pi)$

L.7.3. $\Rightarrow$ $\|A_n\| \leq C < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Fejér 6.3. L.6.2 $\Big\}$ $\Rightarrow$ $A_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$

tasaisesti välillä $[0,2\pi]$ kun $j \to \infty$.

Lisäksi: $K_j \geq 0$ ja $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t)\,dt = 1 \Rightarrow \|K_j\|_1 = 2\pi \quad \forall\, j$

$$\Rightarrow 2\pi \|A_n\| = \|K_j\|_1 \|A_n\| \geq \sup_j \|A_n(K_j)\|_1$$

$$\geq \lim_{j\to\infty} \|A_n(K_j)\|_1 = \|D_n\| \xrightarrow{\text{L.7.5.}} \infty \quad \text{kun } n \to \infty$$ ↯.

$\therefore$ $\exists\, f \in L^1(0,2\pi)$ s.e. $\|f - A_n f\|_1 \not\to 0$. □.

# 8. Avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet

**8.1 Määritelmä** Ol. $\overline{X}, \overline{Y}$ topologisia avaruuksia, $f: \overline{X} \to \overline{Y}$ kuvaus, $a \in \overline{X}$. Kuvaus $f$ on avoin pisteessä $a \in \overline{X}$ jos $\forall$ a:n ympäristöillä $U$ $f(U)$ on pisteen $f(a)$ ympäristö.

Esim 1° Jos $\overline{X}, \overline{Y}$ metrisiä avaruuksia, $a \in \overline{X}$, niin $f$ on avoin pisteessä $a \iff \forall r>0 \ \exists r'>0$ s.e. $B(f(a), r') \subset f(B(a,r))$.

2° $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei avoin 0:ssa: $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$ ei av. $\mathbb{R}$:ssä

3° Projektio $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avoin $\forall x \in \mathbb{R}$

4° $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x,0)$ ei avoin missään pisteessä: $A(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sis. yhtään $\mathbb{R}^2$:n avointa joukkoa.

5° $A: \ell^\infty \to c_0$, $(t_n) \mapsto (\frac{1}{n} t_n)$ ei avoin:
$A(B(0,1)) = \{(t_n) \in c_0 \mid |t_n| < \frac{1}{n} \ \forall n \in N\}$ ei 0:n avoin ystö.

**8.2. Määritelmä** Ol. $\overline{X}, \overline{Y}$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $f: \overline{X} \to \overline{Y}$ on avoin jos $f(U) \subset_o \overline{Y} \ \forall U \subset_o \overline{X}$.

**8.3. Lause** $f: \overline{X} \to \overline{Y}$ avoin $\iff$ $f$ avoin $\forall x \in \overline{X}$.
Tod: (HT)

Huom.: $f$ jatkuva bijektio $\not\Rightarrow$ $f$ avoin. (HT)

**8.4. Lause** Ol. $\overline{X}, \overline{Y}$ normiavaruuksia, $A: \overline{X} \to \overline{Y}$ lin. $A$ on avoin $\iff$ $A$ on avoin pisteessä $\overline{0} \in \overline{X}$.

Tod: "$\Rightarrow$" selvä.
"$\Leftarrow$" Ol. $x \in \overline{X}$, $r>0$. Ol $\Rightarrow \exists r'>0$ s.e. $A(B(\overline{0}, r)) \supset B(\overline{0}, r')$
$\Rightarrow A(B(x,r)) = A(x + B(\overline{0}, r)) = Ax + A(B(\overline{0}, r))$
$\supset Ax + B(\overline{0}, r') = B(Ax, r')$. □

Huom. Jos $\overline{X}, \overline{Y}$ normiavaruuksia, $A: \overline{X} \to \overline{Y}$ avoin lin. kuvaus, niin $A$ on surjektio (HT)

## 8.5. Avoimen kuvauksen lause

Ol. $\bar{X}, \bar{Y}$ Banach-avaruuksia, $A \in \mathcal{L}(\bar{X},\bar{Y})$ surjektio.
Tällöin $A$ on avoin kuvaus.
Tod: kohta

## 8.6. Seuraus

Ol. $\bar{X}, \bar{Y}$ Banach-avaruuksia, $A : \bar{X} \to \bar{Y}$ jatkuva lineaarinen bijektio. Tällöin $A$ on homeomorfismi.

Tod: Bijektio $A : \bar{X} \to \bar{Y}$ on homeomorfismi $\Leftrightarrow$ $A, A^{-1}$ jatkuvia. □

Esim. $\bar{X}$ v.a. ja $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sen normeja s.e.
$\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in \bar{X}, \; \beta > 0$.
$\Rightarrow \quad id_{\bar{X}} : (\bar{X}, \|\cdot\|_1) \to (\bar{X}, \|\cdot\|_2)$ jatkuva lin. bijektio

Jos $(E, \|\cdot\|_1), (E, \|\cdot\|_2)$ Banach-avaruuksia niin
8.5. $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_1 \; \|\cdot\|_2$ ekvivalentit.

Toisaalta: Jos $\bar{X} = C([0,1], \mathbb{R})$, jossa normit $\|\cdot\|_\infty$
ja $\|\cdot\|_1$, niin $\forall x \in \bar{X} \quad \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$
l. $id : (\bar{X}, \|\cdot\|_\infty) \to (\bar{X}, \|\cdot\|_1)$ jva lin. bijektio.
Aik. $(\bar{X}, \|\cdot\|_1)$ ei täydellinen, $(\bar{X}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach
$\Rightarrow$ normit $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ eivät ekvivalentteja
$\therefore \; id_{\bar{X}} : (\bar{X}, \|\cdot\|_1) \to (\bar{X}, \|\cdot\|_\infty)$ ei avoin kuvaus
(jva bij. muttei homeo) $\Rightarrow$ L.8.5. ol. "Banach" välttämätön

Todetaan ensin:
Jos $\bar{X}$ normiavaruus, niin pätee $\forall U, V \subset \bar{X}$:
$\bar{U} + \bar{V} \subset \overline{U+V}$: Ol. $x \in \bar{U}, \; y \in \bar{V}, \; \varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists \; x_0 \in U, \; y_0 \in V$ s.e. $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}, \; \|y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \|(x+y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon$
$\Rightarrow x + y \in \overline{U+V}$.

Huom. $\bar{U} + \bar{V} \subsetneq \overline{U+V}$ (HT)

Os. vielä:

## 8.7. Lause

Ol. $\bar{X}$ normiavaruus, $\bar{Y}$ Banach ja $A : \bar{X} \to \bar{Y}$ lin. surjektio. Jos $U$ on pisteen $\bar{0} \in \bar{X}$ ympäristö, niin $\overline{A(U)}$ on pisteen $\bar{0}$ ymp.stö $\bar{Y}$:ssä.