Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet — Harj. (1.) 21.9.2007

Peltonen / Aalto

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin erilliselle paperille ja palauta se harjoitusten yhteydessä
   a) Mitä matematiikan kursseja olet suorittanut tähän mennessä?
   b) Mitä asioita haluaisit oppia tällä kurssilla? Selitä erityisesti missä haluaisit mahdollisesti soveltaa funktionaalianalyysin taitoja.
   c) Oletko aiemmin osallistunut kurssille? Jos olet, niin miksi jäi kesken?

2. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että kuvaukset $t : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto x+y$ ja $s : \mathbb{K} \times X \to X$, $(a,x) \mapsto ax$ ovat jatkuvia.

3. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita:
   a) $$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\| \quad \forall\, x,y \in X$$
   b) kuvaus $x \mapsto \|x\|$ on tasaisesti jatkuva
   c) Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) := \|x-y\|$ on X:n metriikka.

4. Olkoot $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ vektoriavaruuden X ekvivalentit normit. Osoita, että avaruuksilla $(X, \|\cdot\|_1)$ ja $(X, \|\cdot\|_2)$ on samat avoimet ja suljetut joukot.

5. a) Osoita, että $\forall\, 1 \le p \le q < \infty$ pätee $\ell^p \subset \ell^q$. Ts. osoita $\|x\|_q \le \|x\|_p \quad \forall\, x \in \ell^p$ (Vihje: osoita ensin tapaus $\|x\|_p = 1$)
   b) Osoita, että normiavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.

6. Olkoon $x = (x_n) \in \ell^1$ ja asetetaan
$$\|x\| = \sup_n \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big| .$$
Osoita, että $(\ell^1, \|\cdot\|)$ on normiavaruus. Onko se Banach-avaruus?