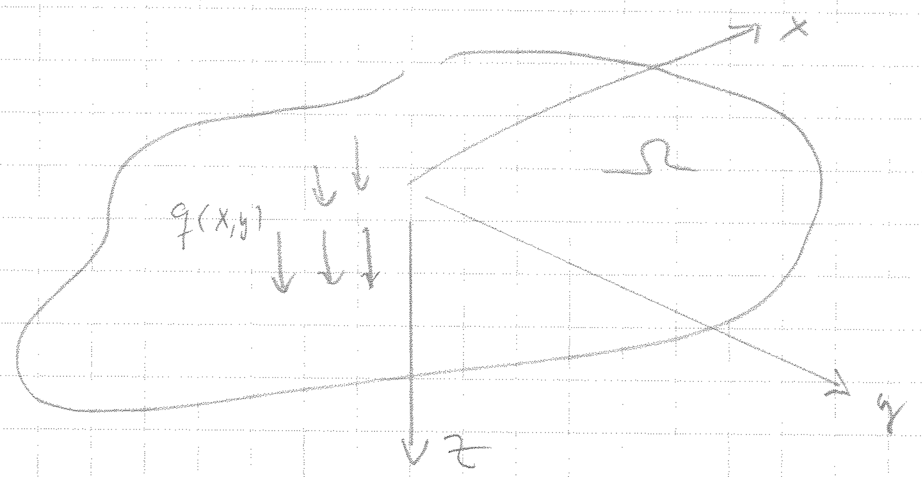
Laatta. Kirchhoffin malli



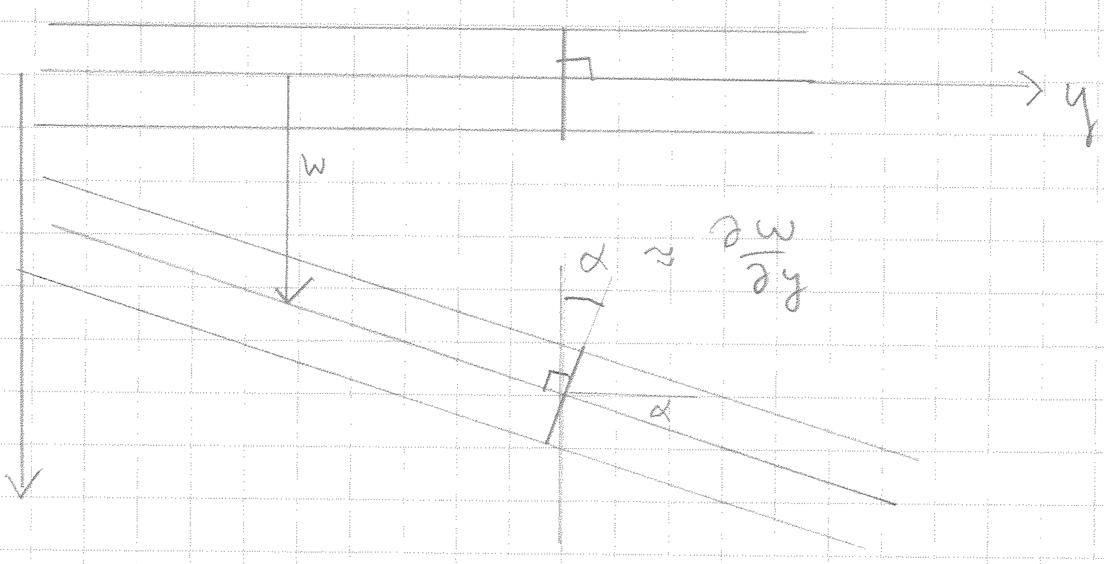
"Stretching", venytys $\Rightarrow$ tasojännitystehtävä.

Laatan paksuus olkoon t (kirjassa h)

ja keskipinnan taipuma z-suunnassa

$w(x,y)$.

Poikkileikkaus y-suunnassa:



Siirtymä y – suunnassa on siis

$$u_2(x,y) = -z\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

Vastaavasti siirtymä x – suunnassa on

$$u_1(x,y) = -z\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

Siirtymä z – suunnassa on z - koord. riippumaton $u_3 = w(x,y)$.

Saadaan venymät

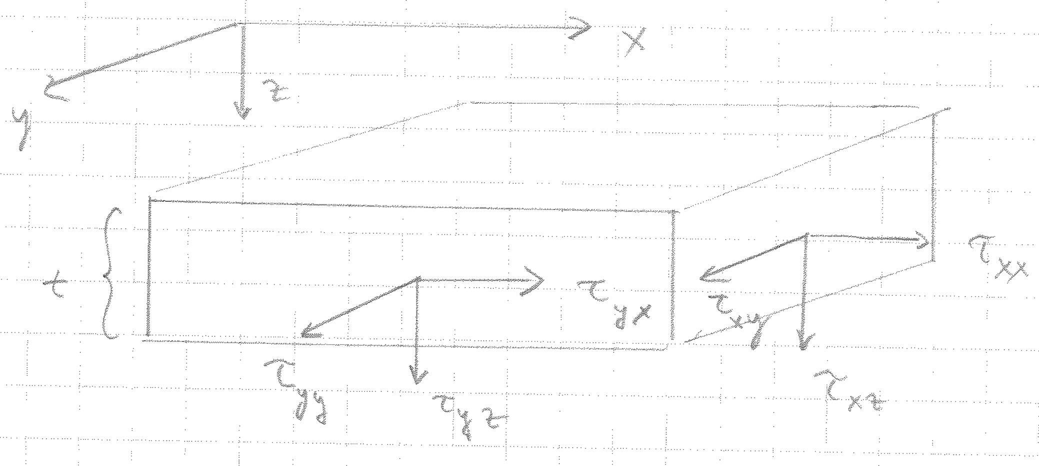
$$\varepsilon_{xx} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{xy} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

kaikki muut häviävät.

Määritellään seuraavat jännitysresultantit.



$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz .$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xx} \, z \, dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yy} \, z \, dz$$

ja vääntömomentit

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \, z \, dz$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \, z \, dz = M_{xy} \quad !$$

Teemme tasojännitysoletuksen

jolloin

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\tau_{yy} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx})$$

ja

$$\tau_{xy} = 2G\,\varepsilon_{xy} .$$

Sijoittamalla:

$$\tau_{xx} = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)(-z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

ja siis

$$M_x = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\int_{-t/2}^{t/2} -z^2\,dz \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) .$$

Koska $\int_{-t/2}^{t/2} z^2\,dz = 2\int_0^{t/2} z^2\,dz$

$$= \frac{2}{3}\Big|_0^{t/2} z^3 = \frac{1}{12} .$$

Merkitään $D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

= taivutusjäykkyys.

Samoin

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

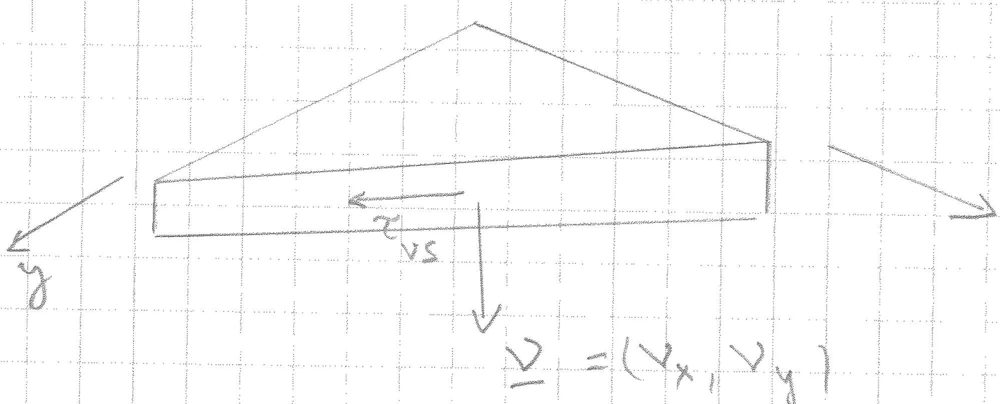
$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} 2G\,\varepsilon_{xy}\,z\,dz$$

$$= -2G\,\frac{t^3}{12}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= -2\,\frac{E}{2(1+\nu)}\,\frac{t^3}{12}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= -(1-\nu)\,D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Koska jännitykset muuntuvat kuin tensori ja integrointi on lineaarinen operaattori, niin momentit muuntuvat kuin tensori.



$$\tau_{\nu\nu} = \nu^T \underline{\underline{\tau}}\, \underline{\nu}$$

$$= (\nu_x, \nu_y) \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \end{pmatrix}$$

$$= (\nu_x \quad \nu_y) \begin{pmatrix} \tau_{xx}\nu_x + \tau_{xy}\nu_y \\ \tau_{xy}\nu_x + \tau_{yy}\nu_y \end{pmatrix}$$

$$= \tau_{xx}\nu_x^2 + 2\tau_{xy}\nu_x\nu_y + \tau_{yy}\nu_y^2 .$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{M_\nu = \nu_x^2 M_x + 2\nu_x\nu_y M_{xy} + \nu_y^2 M_y .}$$

$$\tau_{\nu s} = (-\nu_y, \nu_x) \begin{pmatrix} \tau_{xx}\nu_x + \tau_{xy}\nu_y \\ \tau_{xy}\nu_x + \tau_{yy}\nu_y \end{pmatrix}$$

$$= -\tau_{xx}\nu_x\nu_y - \nu_y^2\tau_{xy}$$

$$+ \tau_{xy}\nu_x^2 + \tau_{yy}\nu_x\nu_y$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{M_{\nu s} = \nu_x\nu_y(M_y - M_x) + (\nu_x^2 - \nu_y^2) M_{xy} .}$$

Leikkausvoima $\underline{Q} = (Q_x, Q_y)$

on vektori joten

$$\boxed{Q_\nu = Q_x \nu_x + Q_y \nu_y .}$$

Perustelu : $\tau_{\nu z} ds = \tau_{yz} dx + \tau_{xz} dy .$

Integroidaan tasapainoyhtälöt yli paksuuden :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 .$$

$$\Rightarrow \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot z \, dz + \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} z \, dz$$

$$+ \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z \, dz = 0$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot z \, dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{t/2}^{t/2} \tau_{xx} z \, dz .$$

$$= \frac{\partial M_x}{\partial x} .$$ ja samoin

$$\int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} z \, dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} .$$

Viimeiseksi osittaisintegrointi

$$\int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot z \, dz = \Big|_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} z$$

$$- \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz = - Q_x$$

Saimme siis

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x}$$

Samoin suunnan

$$\boxed{\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y}$$

Viimeiseksi tasapaino z-suunnassa

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 . \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz}_{= Q_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz}_{= Q_y} + \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = 0$$

Viimeinen termi

$$\int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \, dz = \Big/_{-t/2}^{t/2} \tau_{zz}$$

$$= \tau_{zz}(t/2) - \tau_{zz}(-t/2)$$

$$= q(x,y)$$

Saatiin siis viimeinen tasapaino-yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) = 0}$$

Sijoittamalla edelliset tasapaino-yhtälöt saamme

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0.$$

Kun vielä sijoitamme momenttien yhtälöt saadaan

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} =$$

$$-D\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial x}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\Big]$$

$$=-D\Big[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\Big]$$

$$=-D\Delta^2 w.$$

Saadaan siis biharmoonin yhtälö

$$D\Delta^2 w = q \quad \Omega\text{:ssa},$$

Missä siis

$$\Delta^2 = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2$$

$$=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Laatan potentiaalienergia

On

$$\Phi(w) = \frac{D}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] dA - \int_\Omega q w \, dA .$$

Struktuuri näkee paremmin jos otetaan käyttöön kaarevuudet

$$K_{11} = K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w_{,11},$$

$$K_{12} = K_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -w_{,12},$$

$$K_{22} = K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -w_{,22}.$$

Merkitään myös momentit M_{ij}:llä:

$$M_{11} = M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{12} = M_{xy} = -(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right).$$

$$M_{22} = M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Summaussääntöä käyttäen

Voidaan siis kirjoittaa:

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega M_{ij} K_{ij}\, dA - \int_\Omega q w\, dA$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega M_{ij}(w) K_{ij}(w)\, dA - \int_\Omega q w\, dA$$

$$= \frac{1}{2} a(w,w) - \ell(w).$$

Tässä a on symmetrinen ja positiivisesti (semi) definiitti joten Potentiaalienergian minimointi kinemaattisesti luvallisten siirtymien joukossa W nairalleen antaa variaatiomuodon: etsi $w \in W$ s.e.

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in W.$$

Eksplisiittisesti auki kirjoitettuna

$$\int_\Omega M_{ij}(w) K_{ij}(v)\, dA = \int_\Omega q v\, dA \qquad \forall v \in W.$$

Differentiaaliyhtälö ja reunaehdot selviää nyt osittaisintegroinnilla. Käytetään merkintää $Q_1 = Q_x$, $Q_2 = Q_y$.

$$\int_\Omega M_{ij} K_{ij}(v)\, dA = \int_\Omega M_{ij}\, v_{,ij}$$

$$= -\int_\Omega M_{ij,j}\, v_{,i}\, dA + \int_{\partial\Omega} M_{ij}\, \nu_j\, v_{,i}\, ds$$

*)

$$= -\int_\Omega Q_i\, v_{,i}\, dA + \int_{\partial\Omega} M_{ij}\, \nu_j\, v_{,i}\, ds$$

$$= \int_\Omega Q_{i,i}\, v\, dA - \int_{\partial\Omega} Q_i\, \nu_i\, v\, ds$$

$$+ \int_{\partial\Omega} M_{ij}\, \nu_j\, v_{,i}\, ds$$

Sisä termi antaa siis tasapainoyhtälön

$$Q_{i,i} = q.$$

Nyt, emme pysty varioimaan sekä v:tä, että sen kahta derivaattaa $v_{,1}$, $v_{,2}$ $\partial\Omega$:lla

*) koska $M_{ij,j} = Q_i$.

Kirjoitetaan

$$M_{ij}\nu_j v_{,i} = M_\nu v_{,\nu} + M_{\nu s} v_{,s}$$

$$= M_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu} + M_{\nu s} \frac{\partial v}{\partial s}.$$

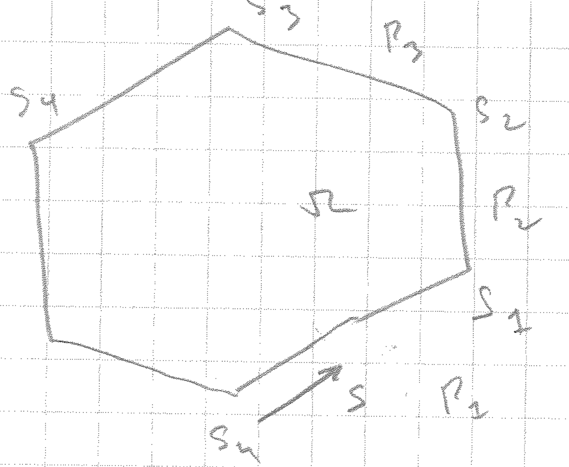
Reuna termit saa siis muodon

$$-\int_{\partial\Omega} M_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds - \int_{\partial\Omega} M_{\nu s} \frac{\partial v}{\partial s}\, ds$$

$$+\int_{\partial\Omega} Q_\nu v\, ds = 0$$

jokaiselle mielivaltaiselle $v \in W$.

Olkoon $\partial\Omega$ monikulmio, kulmien parametrikoordinaatit $s_1, s_2, \ldots, s_n$



Vastaavat reunan osat ovat $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$

Saadaan

$$-\int_{\partial\Omega} M_{\nu s}\frac{\partial v}{\partial s}\,ds = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i} M_{\nu s}\frac{\partial v}{\partial s}\,ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\Gamma_i}\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}v\,ds - \Big/_{\Gamma_i} M_{\nu s}v\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}v\,ds$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[M_{\nu s}(s_i-) - M_{\nu s}(s_i+)\right]v(s_i).$$

<u>Huom</u> Normaali $\underline{\nu}$ muuttuu kulmissa joten $M_{\nu s}$ on tenaksti epäjatkuva funktio.

Reunatermin voi siis kirjoittaa muotoon

$$0 = -\int_{\partial\Omega} M_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i}\left(Q_\nu + \frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}\right)v\,ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[M_{\nu s}(s_i+) - M_{\nu s}(s_i-)\right]v(s_i)$$

Saadaan seuraavat reunaehto-tapaukset reuna-osalla $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Jäykkä tuki:

$$w = 0 \ , \ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$$

Reunatermi häviää kokonaan.

Vapaa tuki

$$w = 0 \qquad M_\nu = 0$$

Jälkimmäinen on luonnollinen reunaehto.

Vapaa reuna

Kaikki reunaehdot ovat luonnollisia

"Korvike-leikkausvoima" $= 0$.

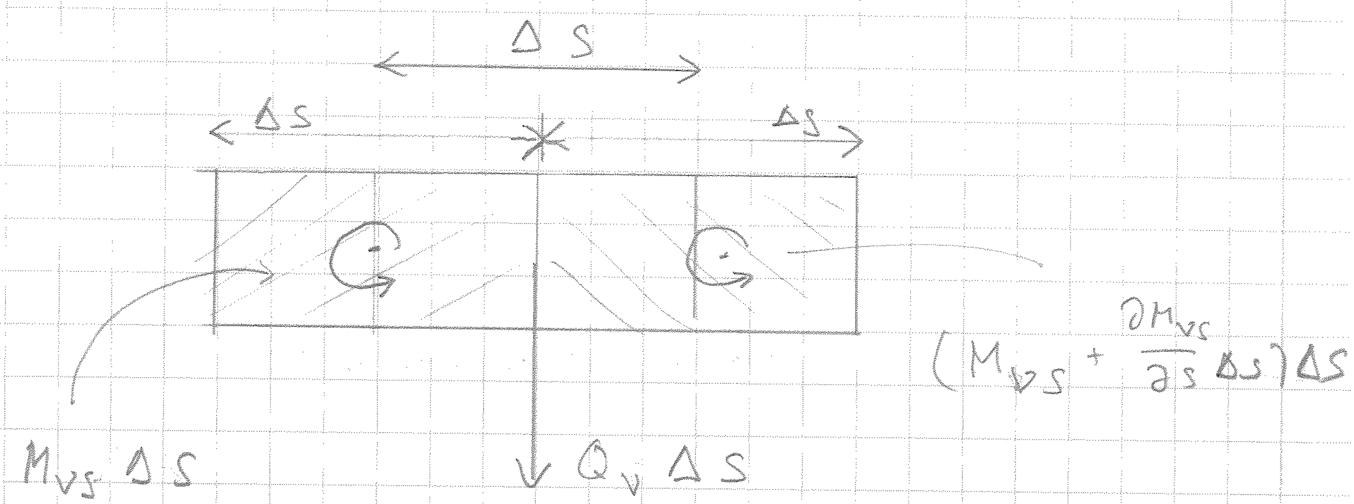
$$Q_\nu + \frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s} = 0.$$

$$M_\nu = 0.$$

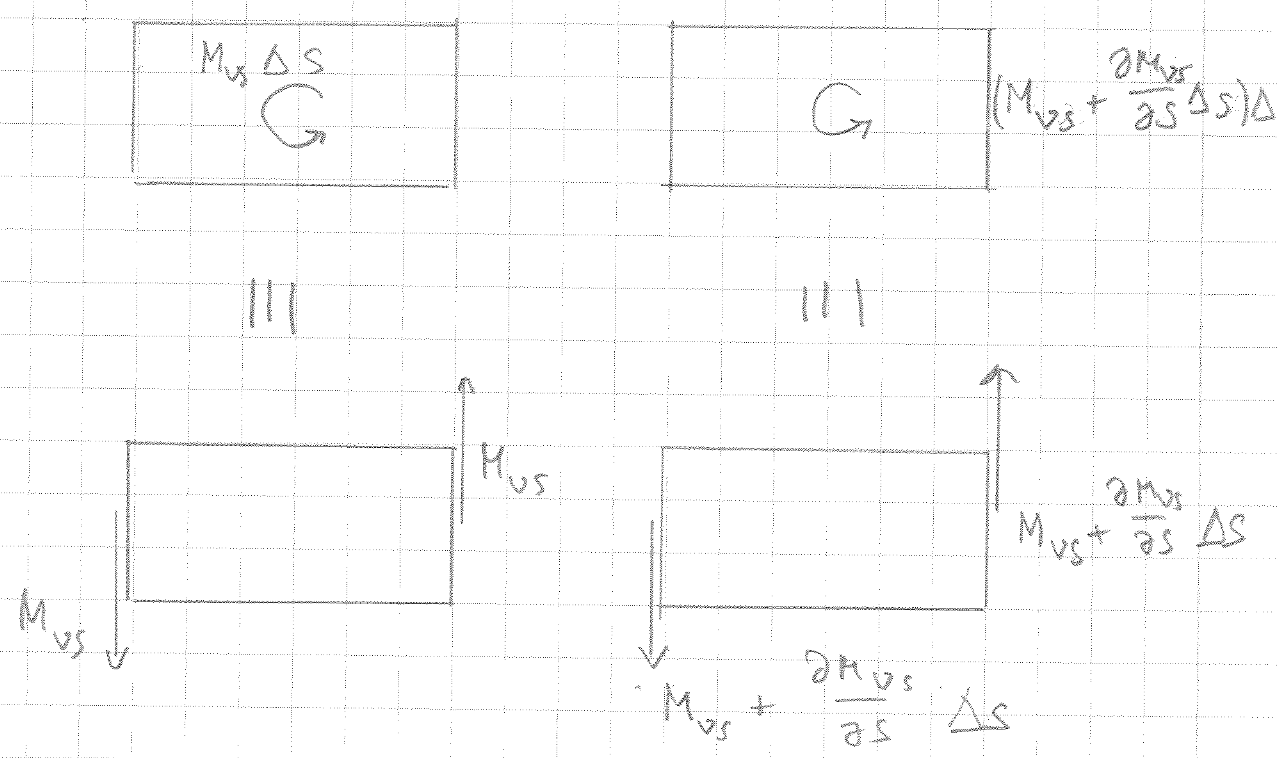
Jos kulma $s_i \in \Gamma$ niin lisäksi saadaan kulmaehto

$$M_{\nu s}(s_i+) - M_{\nu s}(s_i-) = 0.$$

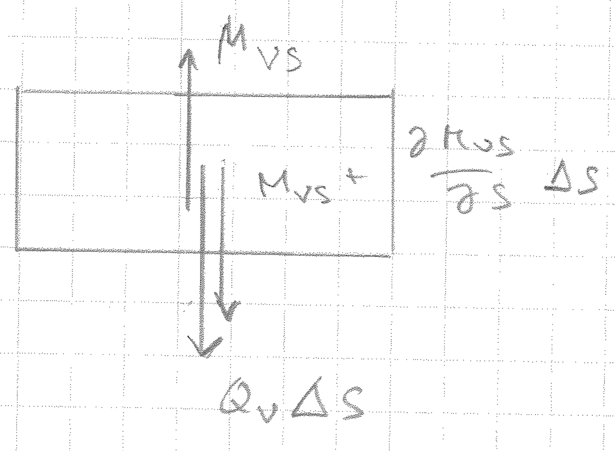
Lujuusopin ja rakenteiden mekaniikan kirjoissa esitetään usein miten Thomson & Tait selitys vapaan reunan ehdoille.



Vääntömomentit korvataan voimapareilla:



Δs – pituiseen reunaosaan vaikuttaa siis voimat



Voimatasapaino

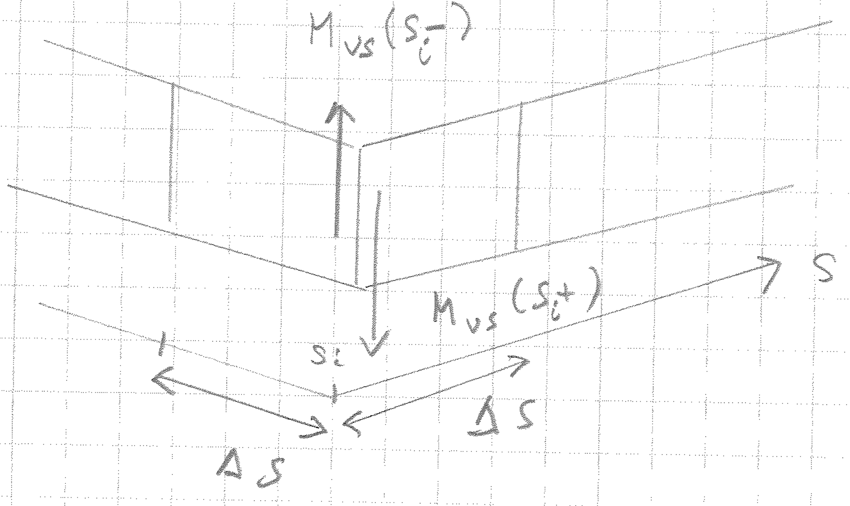
$$\left(Q_v \Delta s + M_{vs} + \frac{\partial M_{vs}}{\partial s} \Delta s \right) - M_{vs} = 0$$

Siis

$$\left(Q_v + \frac{\partial M_{vs}}{\partial s} \right) \Delta s = 0 \qquad \text{eli}$$

$$Q_v + \frac{\partial M_{vs}}{\partial s} = 0 .$$

Kun tehdään sama operaatio kulmassa saadaan:



$2\Delta s$ pituiseen opaan kohdistuu voima

$$Q_v(s_i-)\Delta s - M_{vs}(s_i-)$$
$$+ Q_v(s_i+)\Delta s + M_{vs}(s_i+) = 0 .$$

kun annetaan $\Delta s \to 0$

saadaan siis kulmaehto

$$M_{vs}(s_i+) = M_{vs}(s_i-)$$

$\square$.

Kirchhoff laatan variaatiotehtävä

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja reuna $\partial\Omega$ koostuu kolmesta osasta,

$$\partial\Omega = \Gamma_C \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F ,$$

Γ_C :llä jäykkä kuki : Vakiovat r. ehdot:

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 .$$

Γ_S : vapaasti tuettu.

Vakiova ehto $w = 0$

Luonnollinen ehto

$$M_\nu(w) = \overline{M}_\nu \quad (= \text{annettu})$$

Γ_F : vapaasti liikkuva reuna

Luonnolliset ehdot

$$M_\nu(w) = \overline{M}_\nu \qquad \text{ja}$$

$$\left(Q_\nu + \frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}\right)(w) = \overline{T}_{eff.} = \text{annettu.}$$

Jos vapaalla reunalla on kulmat $s_1, \ldots, s_n$ niin on myös annettava kulmavoimat

$$[\![M_{\nu s}]\!](S_i) = \overline{F}_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

missä $[\![\quad]\!]$ tarkoittaa hyppyä

$$[\![M_{\nu s}]\!](S_i) = M_{\nu s}(S_i +) - M_{\nu s}(S_i -)$$

Helposti nä todetaan, että kimmoisen energia toteuttaa

$$\int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big)^2 + 2\nu \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big)$$

$$+ 2(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big)^2 \Big] dA$$

$$\geq C \int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big) + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big)^2 \Big] dA$$

$$= C \, |w|_2^2 \quad ,$$ missä siis

$|\cdot|_2$ on $H^2(\Omega)$ semi-normi.

Kinemaattisesti kuvalliset funktiot ovat

$$W = \{ v \mid |v|_2 < \infty \, , \, v = 0 \, , \, \tfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$$
$$\Gamma_C \text{:llä}, \quad v = 0 \, , \, \Gamma_S \text{:llä} \}$$

ei homogeenisilla luonnollisilla reunaehdoilla saamme variaatio-tehtävän.

Etsi $w \in W$ siten, että

$$a(w,v) = l(v) \quad \forall v \in W,$$

missä, niin kuin ennen,

$$a(w,v) = \int_\Omega M_{ij}(w)\, K_{ij}(v)\, dA$$

ja nyt

$$l(v) = \int_\Omega q v \, dA - \int_{\Gamma_S} \overline{M}_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds$$

$$+ \int_{\Gamma_F} T_{eff.}\, v \, ds + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i\, v_i(s_i).$$

Jos esim. mitta$(\Gamma_C) > 0$ niin seminormi $|\cdot|_2$ on normi W:ssä:

$$\|v\|_2 \le C |v|_2 \quad \forall v \in W.$$

Harjoitustehtävä. Mitkä ehdot täytyy asettaa kuormituksille q, $\overline{M}_\nu$, $\overline{T}_{eff}$, $\overline{F}_i$ kun $\Gamma_F = \partial\Omega$?

Huom. Sobolevin epäyhtälö sanoo $C(\Omega) \subset H^s(\Omega)$ jos $s > n/2$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Kirchhoff-Laattamallissa ratkaisu etsitään $H^2(\Omega)$:sta. Variaatiotehtävä on hyvin asetettu jos lineaarifunktionaali $l : W \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Pistekuorma $q(x) = \delta(x - x_0)$ on sallittu koska

$$\left| \int_\Omega q\, v\, dA \right| = \left| \int_\Omega \delta(x - x_0)\, v(x)\, dA \right|$$

$$= |v(x_0)| \leq C \|v\|_2 .$$

Huom. Reissner-Mindlin mallissa pistekuorma ei ole sallittu!

Olkoon $W_h \subset W$ äärellis-ulotteinen FE-aliavaruus. FE-formulointi on ngt: etsi $w_h \in W_h$ siten, että

$$a(w_h, v) = \ell(v), \quad \forall v \in W_h.$$

Yleinen FE-teoria antaa siis virhe-estimaatin

$$\| w - w_h \|_2 \le C \inf_{v \in W_h} \| w - v \|_2 .$$

"Ominaisten" rasitustilojen ohella suurin vaikeus K-mallilla on, että "konformi" $H^2(\Omega)$-aliavaruus vaatii $C^1(\Omega)$-jatkuvia elementtejä joka johtaa melko mon. mutkaisiin elementteihin, kts. esim. Braess II § 5, Table 2.

Käyttökelpoisempiin elementteihin päästään käyttämällä ei konformeja elementtejä, siis $W_h \not\subset W$, jotka kuitenkin konvergoivat diskreetissä normissa:

FEM: Etsi $w_h \in W_h$ s.e.

$$a_h(w_h, v) = l(v),$$

$$a_h(w, v) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K M_{ij}(w) K_{ij}(v) \, dA$$

ja

$$\| v \|_h^2 = a_h(v, v).$$

Yksinkertaisin elementti lienee ns. Morleyn kolmio; $P_2(K)$ vapausasteilla