Mat-1.3081 Algebra I Kevät 2008 Harjoitus 5

1) Olkoon G ryhmä. Osoita, että

a) $Z(G) \triangleleft G$

b) jos $H \triangleleft G$ ja $|H| = 2$, $H \subset Z(G)$.

2) Olkoon $D_n := \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ba, \dots, ba^{n-1}\}$, $a^n = e$, $b = aba$.
Osoita, että

a) jos $n \geq 3$, niin $Z(D_n) = \{e\}$, kun n on pariton ja $Z(D_n) = \{e, a^{n/2}\}$, kun n on parillinen.

b) jos $k | n$ ja $k \geq 2$, niin D_n:llä on olemassa aliryhmä H siten, että $H \simeq D_k$.

3) Etsi diedraaliryhmän D_4 normaalit aliryhmät.

4) Olkoon G Abelin ryhmä, ja $T(G)$ äärellistä kertalukua olevien G:n alkioiden joukko. Sanotaan, että G on torsiovapaa, jos $T(G) = \{e\}$ ja torsioryhmä, jos $T(G) = G$.
Osoita, että

a) $T(G) < G$

b) $G/T(G)$ on torsiovapaa

c) jos $H < G$, niin G on torsioryhmä jos ja vain jos H ja G/H ovat torsioryhmiä.

5) Olkoon G ryhmä, $H < G$, $K \triangleleft G$, $H \cap K = \{e\}$ ja $G = HK$.
Osoita, että $H \simeq G/K$.

6) Olkoon $G = \langle g \rangle$ ja $\mathrm{ord}(g) = n$. Osoita, että

a) $G = \langle g^k \rangle$ joss $\mathrm{syt}(k,n) = 1$

b) Jos $k | n$, niin $\mathrm{ord}(g^{n/k}) = k$ ja $\langle g^{n/k} \rangle$ on G:n ainoa kertalukua k oleva aliryhmä.

c) $\sum_{\substack{d \\ d|n}} \varphi(d) = n$

(VINKKI: KÄYTÄ a)- JA b)-KOHTIA)