To appear in Avtomatika i Telemehanika

Сходимость итерационной процедуры с неполными коррекциями; случай самосопряженных операторов

д-р Т. Эйрола

Технологический университет г. Хельсинки, Финляндия

Изучается быстрота сходимости итерационной процедуры с неполными коррекциями для линейных систем с самосопряженными операторами.

1 Введение

Рассматривается линейная система

$$x = Ax + b. \tag{1}$$

Здесь A – линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H. Элемент $b \in H$ фиксирован.

Одновременно с системой (1) рассматривается динамическая система

$$x_{n+1} = Ax_n + b, \qquad n = 0, 1, 2 \dots. \tag{2}$$

Итерационные последовательности (2) (см.[1]) возникают при решении уравнения (1) методом обычных итераций. С другой стороны, системы (2) часто используются как математические модели функционирования некоторых реальных объектов.

Величину $\Delta_n = Ax_n + b - x_n$ называют невязкой. Формулы (2) можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n + \Delta_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Решения уравнения (1) – это состояния равновесия динамической системы (2). Одна из основных проблем заключается в определении условий, при которых последовательности (2) сходятся к состояниям равновесия (в задачах вычислительной математики – к решениям уравнения (1)). Если $\rho(A)$ – это спектральный радиус оператора A, то условие

$$\rho(A) < 1 \tag{4}$$

одновременно обеспечивает единственность состояния равновесия и сходимость к этому состоянию равновесия последовательности (2).

Равенства (3) позволяют рассматривать невязки Δ_n как коррекции, вводимые в состояние x_n при переходе к последующему состоянию x_{n+1} (см.[1]). В ряде случаев (см.[1]) коррекция вводится лишь частично. Например, если x_n – это конечномерный вектор или некоторая функтсия, то при введении коррекций могут быть известны лишь некоторые компоненты вектора Δ_n или, соответственно, значения функции Δ_n лишь на некоторой части области ее определения – в этих случаях можно пытаться использовать известную неполную информацию о невязке Δ_n. Кроме этого, введение известных коррекций Δ_n может требовать значительных материальных или каких-либо других расходов – это также приводит к необходимости использования не всей невязки Δ_n. В математической формализации описанные ситуации приводят к отличным от (3) итерационным процедурам

$$x_{n+1} = x_n + D_n\Delta_n = x_n + D_n(Ax_n + b - x_n), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

Здесь D_n – некоторые операторы, о которых можно в разумном смысле говорить, что они меньше единичного оператора.

Аналогичные (5) формулы возникают в условиях, когда линейное уравнение (1) решают специальными методами, не совпадающими с обычными итерациями (2). К таким методам относятся обычные и блочные методы Зейделя (см., например, [2], [3], [4], [5]). Отметим также, что к виду (5) приводит анализ устойчивости рассинхронизованных импульсных систем (см. [6], [7], [8]).

В настоящей работе рассматривается система (5), в которой линейный оператор A самосопряжен и удовлетворяет условию (4). Операторы D_n предполагаются линейными, самосопряженными и неотрицательно определенными, причем спектр $\sigma(D_n)$ каждого оператора D_n удовлетворяет включению

$$\sigma(D_n) \subset [0, 1] \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

2 Основной результат

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $| \cdot |$ обозначаются, соответственно, скалярное произведение и норма в пространстве H.

Теорема. *Пусть линейные самосопряженные операторы* A, D_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют условиям (4), (6). Пусть можно указать такую возрастающую последовательность номеров* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и такую последовательность неотрицательных чисел* $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$, *что выполнены соотношения*

i) $\max\limits_{n_j \le i < n_{j+1}} \langle D_i x, x \rangle \ge \delta_j \, |x|^2$ для всех x и j

ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{n_{j+1} - n_j} = \infty$.

Тогда итерации (5) сходятся к решению уравнения (1).

Доказательство вынесено в приложение.

В силу оценки

$$\langle D_i x, x \rangle = |D_i x|^2 + \langle (I - D_i) D_i x, x \rangle \ge |D_i x|^2 \tag{7}$$

из этой теоремы вытекает следующее простое

Следствие. *Пусть выполнены условия (4),(6). Пусть можно указать такую возрастающую последовательность номеров* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и такую последовательность неотрицательных чисел* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *что справедливы условия*

j) $\max\limits_{n_j \le i < n_{j+1}} |D_i x| \ge \mu_j \, |x|$ для всех x и j

jj) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j^2}{n_{j+1} - n_j} = \infty$.

Тогда итерации (5) сходятся к решению уравнения (1).

В связи с приведенной теоремой возникает вопрос о том, нельзя ли условие (ii) заменить менее ограничительным условием

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{(n_{j+1} - n_j)^{\gamma}} = \infty, \tag{8}$$

где $\gamma \in [0, 1)$. Ответ на этот вопрос отрицательный. Описание соответствующего примера содержится в приложении.

3 Приложение

1. Доказательство теоремы. Обозначим через x^* состояние равновесия динамической системы (2). Как уже отмечалось, из (4) вытекает единственность состояния равновесия (единственность решения уравнения (1)). Ниже используются обозначения

$$u_n = (I-A)^{\frac{1}{2}}(x_n - x^*)\ . \tag{9}$$

Здесь $(I-A)^{\frac{1}{2}}$ – это положительно определенный самосопряженный квадратный корень из положительно определенного оператора $I-A$. Из тождества

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (I-A)^{\frac{1}{2}}[x_n + D_n(Ax_n + b - x_n - Ax^* - b + x^*) - x^*] = \\ &= u_n - (I-A)^{\frac{1}{2}}D_n(I-A)(x_n - x^*) = (I-B_n)u_n\ , \end{aligned}$$

вытекает, что

$$u_{n+1} = (I-B_n)u_n, \tag{10}$$

где $B_n = (I-A)^{\frac{1}{2}}D_n(I-A)^{\frac{1}{2}}$ – самосопряженный оператор, для спектра $\sigma(B_n)$ которого справедливо включение $\sigma(B_n) \subset [0, 2-\varepsilon]$; здесь $\varepsilon = 1 - \|A\| > 0$. В силу (10) последовательность $|u_n|$ не возрастает. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $|u_n| \to 0$. Основную роль при доказательстве играет следующее утверждение.

Лемма 1. *При каждом $k \geq n$ справедлива оценка*

$$|u_{k+1}|^2 \leq e^{-\frac{\varepsilon\delta}{2\pi(k-n)+\pi}}\ |u_n|^2\ . \tag{11}$$

где

$$\delta = \frac{\langle B_k u_n, u_n\rangle}{|u_n|^2}. \tag{12}$$

Действительно, пусть лемма 1 верна. Так как

$$\left|(I-A)^{\frac{1}{2}}u\right| \geq \sqrt{\varepsilon}\,|u|$$

и

$$\langle B_i u, u\rangle = \left\langle D_i(I-A)^{\frac{1}{2}}u, (I-A)^{\frac{1}{2}}u\right\rangle\ ,$$

то

$$\max_{n_j \leq i < n_{j+1}} \langle B_i u, u\rangle \geq \varepsilon\delta_j\,|u|^2\ ,$$

и найдется такое $k \in [n_j, n_{j+1})$, что

$$\left\langle B_k u_{n_j}, u_{n_j} \right\rangle \geq \varepsilon \delta_j \left| u_{n_j} \right|^2 .$$

Из леммы 1 будет вытекать оценка

$$\left| u_{n_{j+1}} \right|^2 \leq |u_{k+1}|^2 \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 \delta_j}{2\pi(k-n_j)+\pi}} \left| u_{n_j} \right|^2 \leq e^{-\frac{\varepsilon^2 \delta_j}{2\pi(n_{j+1}-n_j)+\pi}} \left| u_{n_j} \right|^2 .$$

Поэтому

$$|u_{n_m}|^2 \leq \prod_{j=1}^{m} e^{\frac{-\varepsilon^2 \delta_j}{2\pi(n_{j+1}-n_j)+\pi}} |u_{n_1}|^2$$

и, так как,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \delta_j}{2\pi(n_{j+1}-n_j)+\pi} \geq \frac{\varepsilon^2}{3\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{n_{j+1}-n_j} = \infty$$

то $|u_n| \to 0$.

Итак, осталось доказать лемму 1. Положим

$$\rho = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = k - n, \quad \cos\phi = \frac{\langle u_n, u_k \rangle}{|u_n|\,|u_k|}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Доказательство леммы 1 опирается на следующие два утверждения.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$|u_k| \leq \eta(\phi/j)^j \, |u_n| \ , \tag{13}$$

где

$$\eta(t) := \frac{\varepsilon}{2}\cos(t) + \sqrt{1 - \varepsilon + (\frac{\varepsilon}{2}\cos(t))^2}.$$

Лемма 3. *Если* $\sin\phi \leq \sin\psi := \sqrt{\frac{\delta}{2\rho}}$, *то верна оценка*

$$|(I - B_k)u_k|^2 \leq \left(1 - 2\varepsilon\rho\, \sin^2(\psi - \phi)\right) |u_k|^2 \ . \tag{14}$$

Доказательство леммы 2. Вначале докажем неравенство

$$|u_{i+1}| \leq \eta(\tau_i)\, |u_i| \ . \tag{15}$$

где через τ_i обозначен угол между векторами u_i и u_{i+1}. Поскольку спектр оператора $\rho I - B_i$ принадлежит отрезку $[-\rho, \rho]$, то

$$\left| u_{i+1} - \frac{\varepsilon}{2} u_i \right| = |\rho u_i - B_i u_i| \leq (1 - \frac{\varepsilon}{2})\, |u_i| \ .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|u_{i+1}|^2 - \varepsilon\cos(\tau_i)\,|u_{i+1}|\,|u_i| \le (1-\varepsilon)\,|u_i|^2$$

и, следовательно,

$$|u_{i+1}| \le \left(\ \tfrac{\varepsilon}{2}\cos(\tau_i) + \sqrt{1-\varepsilon+(\tfrac{\varepsilon}{2}\cos(\tau_i))^2}\ \right)|u_i|\ .$$

Неравенство (15) доказано.

В силу (15) справедлива оценка

$$|u_k| \le \exp\{\sum_{i=n}^{k-1} f(\tau_i)\}\ |u_n|\,, \tag{16}$$

где $f(\tau) = \log\eta(\tau)$. Найдем величину

$$\alpha = \max\{\ \sum_{i=1}^{j} f(\beta_i)\mid\ \beta_i \in [0,\pi]\,,\ i=1,\ldots,j\,,\ \sum_{i=1}^{j}\beta_i \ge \phi\,\}\,.$$

Положим

$$s(t) = \sqrt{1-\varepsilon+(\tfrac{\varepsilon}{2}\cos(t))^2}\,.$$

Тогда

$$f'(t) = -\frac{\varepsilon\sin t}{s(t)}\ ,\qquad f''(t) = -\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)^2\cos t}{s(t)^3}\,.$$

Функция $f'(t)$ отрицательна при $t\in(0,\pi)$, поэтому максимум суммы $\sum_{i=1}^{j} f(\beta_i)$ достигается при $\sum_{i=1}^{j}\beta_i = \phi$. Предположим вначале , что $\beta_i \in [0,\pi/2]$, $i=1,\ldots,j$. Тогда в силу неравенства $f''(t)<0$ при $t\in[0,\pi/2]$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j} f(\beta_i) &\le \sum_{i=1}^{j}[f(\phi/j)+f'(\phi/j)(\beta_i-\phi/j)] = \\ &= jf(\phi/j)+f'(\phi/j)(\sum_i\beta_i-\phi) = jf(\phi/j)\ .\end{aligned}$$

Отсюда в силу (16) следует неравенство (13).

Рассмотрим теперь случай, когда максимизирующий набор $\{\beta_i\}$ содержит число $\beta\in(\pi/2,\phi]$. Тогда справедливы оценки

$$\frac{\phi-\beta}{j-1} \le \phi-\beta \le \pi-\beta < \frac{\pi}{2}\,.$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\beta}[f(\beta)+(j-1)f(\tfrac{\phi-\beta}{j-1})] = f'(\beta)-f'(\tfrac{\phi-\beta}{j-1}) \le f'(\beta)-f'(\pi-\beta) = 0\,,$$

причем равенство достигается только при $\phi = \pi$ и $j = 2$. В этом тривиальном случае утверждение леммы 2 непосредственно следует из (13). Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть v – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором u_k, т.е. $v = (cu_n + su_n')/\left|u_n\right|$, где $c = \cos\phi$, $s = \sin\phi$ и $u_n' \perp u_n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\left|u_{k+1}\right|^2 &= \left|u_k\right|^2 - 2\left\langle B_k u_k, u_k\right\rangle + \left|B_k u_k\right|^2 = \\
&= \left|u_k\right|^2 - \varepsilon\left\langle B_k u_k, u_k\right\rangle + \left\langle B_k(B_k - 2 + \varepsilon)u_k, u_k\right\rangle \leq \\
&\leq \left(1 - \varepsilon\left\langle B_k v, v\right\rangle\right)\left|u_k\right|^2 .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Оценим снизу скалярное произведение $\langle B_n v, v\rangle$. Положим

$$
g(\gamma,\beta) := \langle B_n v, v\rangle = c^2\delta + 2cs\gamma + s^2\beta = \begin{bmatrix} c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} ,
$$

где

$$
\gamma = \left\langle B_k u_n, u_n'\right\rangle / \left|u_n\right|^2 , \quad \beta = \left\langle B_k u_n', u_n'\right\rangle / \left|u_n\right|^2 .
$$

Поскольку собственные значения матрицы $\begin{bmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$ принадлежат отрезку $[0, 2\rho]$, справедливы оценки

$$
\gamma^2 \leq \delta\beta , \quad \gamma^2 \leq (2\rho - \delta)(2\rho - \beta) .
$$

Найдем минимум функции $g(\gamma,\beta)$ в выпуклой области

$$
\gamma^2/\delta \leq \beta \leq 2\rho - \gamma^2/(2\rho - \delta) , \quad \gamma^2 \leq \delta(2\rho - \delta) .
$$

В силу линейности функции $g(\gamma,\beta)$ по переменной β получим

$$
\min_\beta g(\gamma,\beta) = g(\gamma, \gamma^2/\delta) = \frac{s^2}{\delta}\left(\frac{c}{s}\delta + \gamma\right)^2 .
$$

Предположение $\sin\phi \leq \sin\psi = \sqrt{\frac{\delta}{2\rho}}$ эквивалентно неравенству

$$
\frac{c^2}{s^2}\delta^2 \geq \delta(2\rho - \delta) ,
$$

из которого вытекает, что $\min g(\gamma, \gamma^2/\delta)$ достигается в точке $\gamma = -\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}$. Таким образом,

$$
\min g(\gamma,\beta) = \left(c\sqrt{\delta} - s\sqrt{2\rho - \delta} \right)^2 = 2\rho \ \sin^2(\psi - \phi)
$$

и для скалярного произведения $\langle B_k v, v\rangle$ справедлива оценка

$$\langle B_k v, v\rangle \geq 2\rho \sin^2(\psi - \phi).$$

Подставляя это неравенство в (17) получим (14). Заметим, что при $\sin\phi \geq \sqrt{\frac{\delta}{2\rho}}$ величина $\langle B_k v, v\rangle$ может равняться 0. Лемма 3 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 1. В силу лемм 2 и 3 верна оценка

$$|u_{k+1}|^2 \leq \max_{0\leq\phi\leq\pi} \zeta(\phi)\ |u_n|^2 = \max_{0\leq\phi\leq\psi} \zeta(\phi)\ |u_n|^2\ ,$$

где

$$\zeta(\phi) := \eta(\phi/j)^{2j} \left(1 - 2\varepsilon\rho\ \sin^2(\psi - \phi)\right)\ .$$

Поскольку

$$\eta(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\cos(t) + \sqrt{1 - \varepsilon + (\frac{\varepsilon}{2})^2} = 1 - \tfrac{\varepsilon}{2}(1 - \cos(t))\,,$$

то, в силу неравенства $\log(1-x) \leq -x$, справедливо соотношение

$$\zeta(\phi) \leq e^{-\varepsilon\,[j(1-\cos(\phi/j)) + 2\rho\sin^2(\psi-\phi)]}\ .$$

Используя оценки

$$\cos t \leq 1 - t^2/\pi\,,\ \sin t \geq 2t/\pi \quad \text{при} \quad t \in [0, \pi/2]\,,$$

получим

$$\begin{aligned}\zeta(\phi) &\leq e^{-\varepsilon\,[\frac{\phi^2}{\pi j} + \frac{8\rho}{\pi^2}(\psi-\phi)^2]} \leq e^{-\frac{8\varepsilon\rho}{\pi^2+8\pi\rho j}\arcsin\left(\sqrt{\delta/2\rho}\right)^2} \leq \\ &\leq e^{-\frac{4\varepsilon\delta}{\pi^2+8\pi\rho j}} \leq e^{-\frac{\varepsilon\delta}{\pi+2\pi\rho j}}\ ,\end{aligned}$$

откуда вытекает (11). Лемма 2 (а с ней и теорема) доказана.

2. Пример. Ниже рассматривается пример в плоскости $\mathbf{R}^2$, показывающий, что условие *ii)* приведенной в параграфе 2 теоремы не может быть заменено более слабым условием

$$\sum_j \frac{\delta_j}{(n_{j+1} - n_j)^\gamma} = \infty \tag{18}$$

где $\gamma \in [0, 1)$. В качестве D_n используются операторы проектирования на одномерное подпространство l_n плоскости $\mathbf{R}^2$, которое поворачивается при изменении n.

Пусть $H = \mathbf{R}^2$, $A = 0$, $b = 0$. Таким образом, рассматривается итерационная процедура

$$x_{n+1} = x_n - D_n x_n \tag{19}$$

для уравнения $x = 0$. Тогда $B_n = D_n$ и $u_n = x_n$. Укажем начальный вектор x_0 и построим последовательности n_j и D_n, для которых выполнены

$$\max_{n_j \le i < n_{j+1}} \langle D_i, x, x\rangle \ge \tfrac{1}{2}|x|^2 \quad \text{при всех } x \in \mathbf{R}^2 \text{ и } j \tag{20}$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_j \frac{1}{(n_{j+1}-n_j)^\gamma} = \infty \tag{21}$$

$$\inf |x_n| > 0 \ , \quad \text{т.е.} \quad x_n \not\to x^* . \tag{22}$$

Фиксируем произвольный угол $\phi \in [0, \pi/2]$ и положим

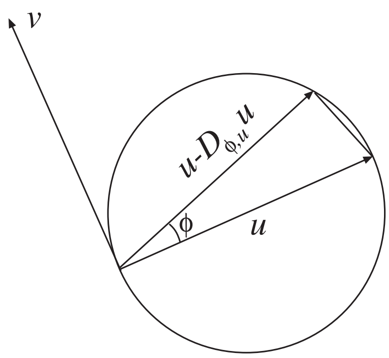
$$D_\phi = \begin{bmatrix} \sin^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi \end{bmatrix} .$$

Спектром D_ϕ является пара $\{0,1\}$. При $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$u - D_\phi u = [\,\cos^2\phi \sin\phi\cos\phi\,]$$

и, следовательно, угол между векторами u и $u - D_\phi u$ равен ϕ.

Аналогично, для произвольного $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$ положим



$$\begin{aligned} D_{\phi,u} u &= \sin^2\phi\ u + \sin\phi\cos\phi\ v \\ D_{\phi,u} v &= \sin\phi\cos\phi\ u + \cos^2\phi\ v . \end{aligned}$$

где $v = \begin{bmatrix} -u^2 \\ u^1 \end{bmatrix}$. Оператор $I - D_{\phi,u}$ является проектором на прямую, составляющую угол ϕ с вектором u.

Пусть $\gamma \in [0,1)$, а $m_j \ge 2$, $j = 1, 2, \dots$ – произвольная последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая соотношениям

$$\sum_{j=1}^\infty m_j^{-1} < \infty \ , \quad \sum_{j=1}^\infty m_j^{-\gamma} = \infty \tag{23}$$

(например m_j – наименьшее натуральное число, такое что $m_j \geq (1 + j)^{1/\gamma}$). Положим $n_1 = 0$,

$$n_2 = n_1 + 2m_1 \,, \quad k_1 = n_1 + m_1 \,, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2m_1} \,.$$

Для определения операторов D_i и итераций u_i при $i = n_1, \ldots, k_1 - 1$ воспользуемся реккурентными формулами

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,, \quad D_0 = D_{\phi_1, u_0} \,, \quad u_1 = u_0 - D_0 u_0$$
$$D_i = D_{\phi_1, u_i} \,, \quad u_{i+1} = u_i - D_i u_i \,, \quad i = n_1, \ldots, k_1 - 1 \,.$$

Тогда

$$u_{k_1} = (\cos\phi_1)^{m_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,, \qquad D_{k_1 - 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,.$$

Продолжим построение последовательности D_i при $i = k_1, \ldots, n_2 - 1$, полагая

$$D_i = D_{\phi_1, u_i} \,, \quad u_{i+1} = u_i - D_i u_i \,.$$

При этом получим

$$u_{n_2} = -(\cos\phi_1)^{2m_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,, \qquad D_{n_2 - 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,.$$

Отсюда следует

$$u_{n_2} = -(\cos\tfrac{\pi}{2m_1})^{2m_1} u_{n_1} \,, \quad n_2 - n_1 = 2m_1 \,,$$

и

$$\max_{n_1 \leq i < n_2} \langle D_i, x, x \rangle \geq \max\left(\langle D_{k_1-1}, x, x\rangle, \langle D_{n_2-1}, x, x\rangle\right) \geq \tfrac{1}{2}\,|x|^2 \,.$$

Полагая

$$n_{j+1} = n_j + 2m_j \,, \ \phi_j = \frac{\pi}{2m_j} \,,$$

и продолжая построение последовательности D_i аналогично тому, как это делалось выше, получим

$$u_{n_{j+1}} = -(\cos\tfrac{\pi}{2m_j})^{2m_j} u_{n_j} \,, \quad n_{j+1} - n_j = 2m_j$$

и

$$\max_{n_j \leq i < n_{j+1}} \langle D_i, x, x \rangle \geq \tfrac{1}{2}\,|x|^2 \,.$$

Из неравенств

$$\cos t \geq 1 - t^2/2 \,, \qquad \log(1 - t) \geq \frac{t}{c}\log(1 - c)$$

где $c = \pi^2/32$, $t \in [0, c]$, вытекают оценки

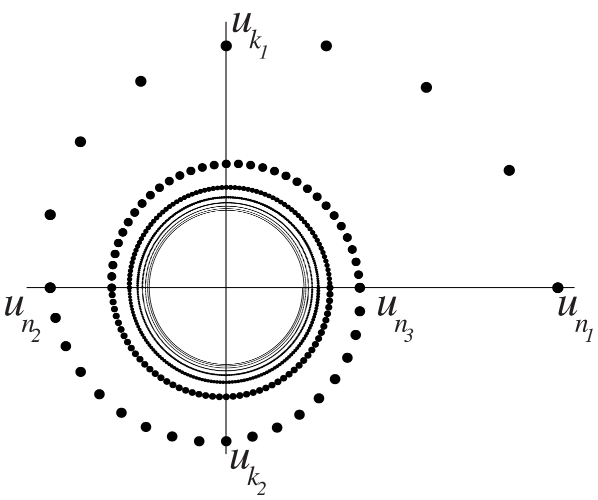
$$\begin{aligned}
\left|u_{n_{j+1}}\right| &= \prod_{k=1}^{j} (\cos \tfrac{\pi}{2m_k})^{2m_k} \geq \prod_{k=1}^{j} (1 - \tfrac{\pi^2}{8m_k^2})^{2m_k} = \\
&= e^{\sum_{k=1}^{j} 2m_k \log(1 - \frac{\pi^2}{8m_k^2})} \geq \\
&\geq e^{\sum_{k=1}^{j} \frac{8}{m_k} \log(1-c)} \geq (1-c)^{\sum_{k=1}^{\infty} 8/m_k} > 0\,.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\sum_{j\geq 1} (n_{j+1} - n_j)^{-\gamma} = \sum_{j\geq 1} (2m_j)^{-\gamma} = \infty\,.$$

Таким образом, выполнены все условия (20),(21),(22).

На рисунке изображена последовательность u_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ для случая $\gamma = 1/2$ ($m_i = (2+i)^2 = 4, 9, 16, 25, \ldots$).



Замечание. В случае, когда A – самосопряженный сжимающий оператор в конечномерном пространстве, а все матрицы D_n *диагональны*, можно показать, что итерации (5) сходятся, если при всех x выполнено условие

(24) $$\sum_i \langle D_i x, x\rangle = \infty.$$

Автор благодарен *М. А. Красносельскому* и *Д. И. Рачинскому* за обсуждение и советы.

Литература

[1] Красносельский, А.М., Красносельский, М.А., Кузнецов, Н.А.// ДАН, **318** (1991), 291-294

[2] Bertsekas, D. P., and Tsitsiklis, J. N., *Parallel and distributed computation.* Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

[3] Фаддеева, В.Н., Фаддеев, Д.К.// Кибернетика, (1977), no. 6,

[4] Фаддеева, В.Н., Фаддеев, Д.К. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Москва, Физматгиз, (1963)

[5] Robert F. *Discrete iterations. A Metric Study.* Springer, Berlin (1986).

[6] Асарин, Е.А., Козякин, В.С., Красносельский, М.А., Кузнецов, Н.А. *Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем.* Москва, Наука, (1992)

[7] Красносельский, А.М., // Автоматика и телемеханика, (1985), no. 11, 170–171.

[8] Eirola, T., Krasnosel'skii, A. M., Krasnosel'skii, M. A., Kuznetsov, N. A., and Nevanlinna, O., *Incomplete Corrections in Nonlinear Problems*, Helsinki Univ. Techn., Math. Report A318 (1993)